TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Terças e Quintas de 8:00 às 10:00 hs

prof. Tania S. Klein

tania@eq.ufrj.br

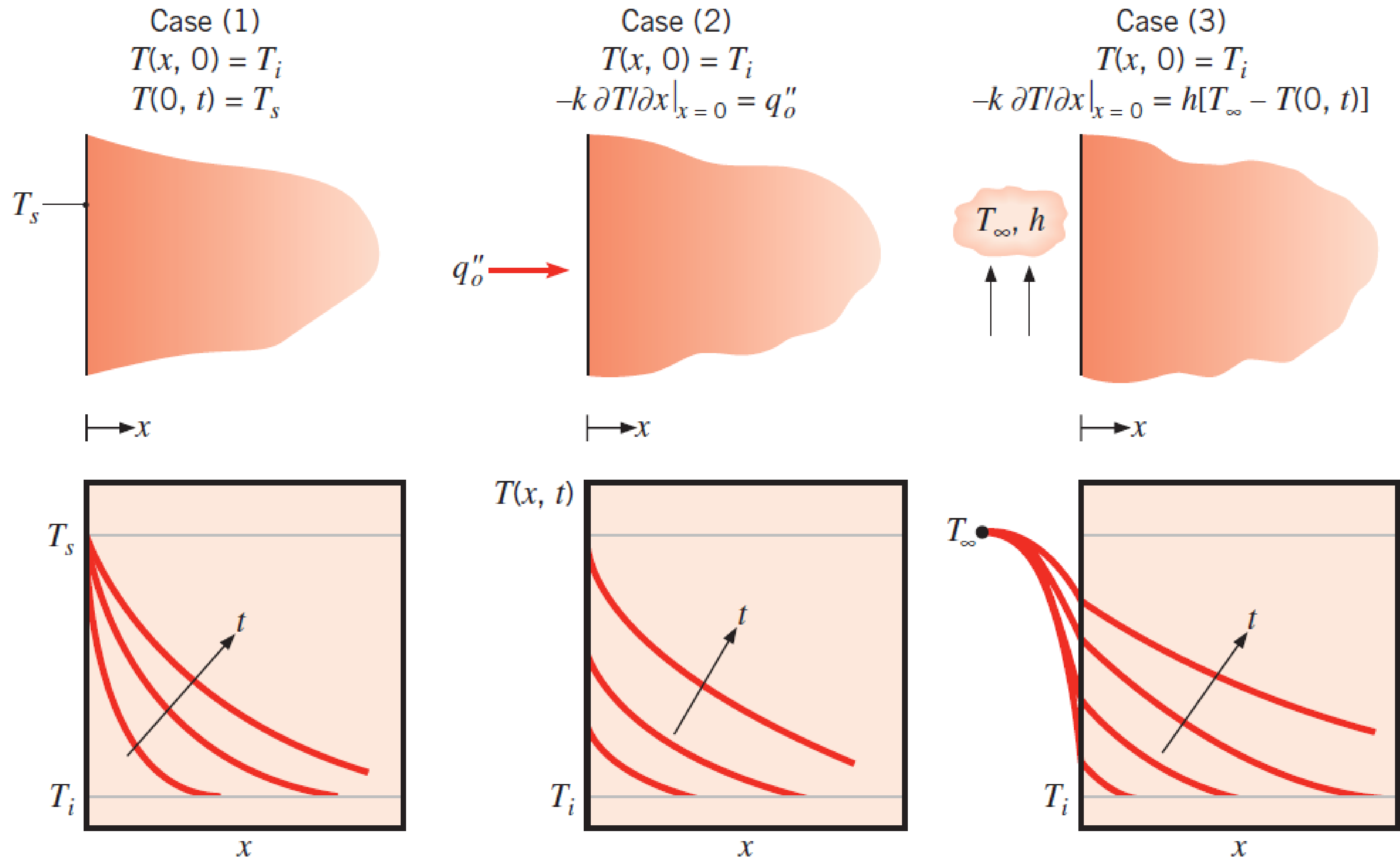
Lab CFD

Aula 10

- Condução Transiente – Sólido Semi-Infinito
  - Introdução
  - Condição de Contorno: Temperatura Superficial Constante
  - Condição de Contorno: Fluxo de Calor na Superfície Constante
  - Condição de Contorno: Convecção na Superfície
  - Espessura de Penetração Térmica
  - Exemplo

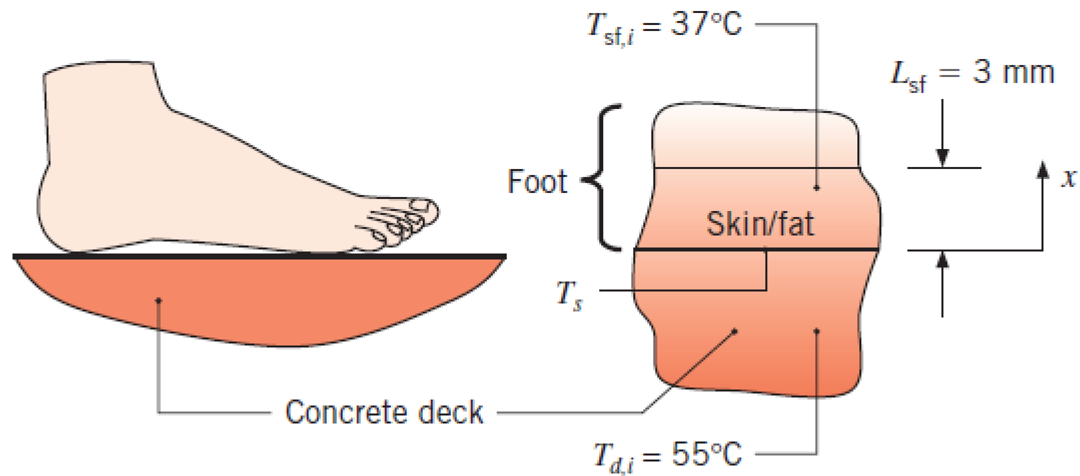
Sólido Semi-Infinito

Introdução



Sólido Semi-Infinito

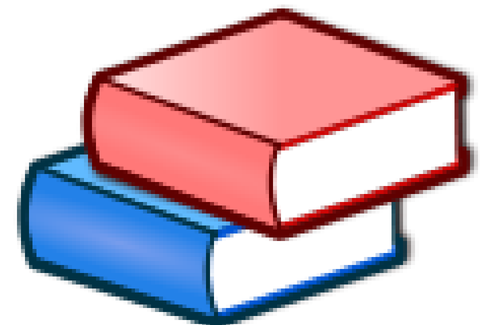
Introdução



Uma caneca de metal e livros num mesmo ambiente há muito tempo. Por que você sente a caneca mais fria??







Sólido Semi-Infinito

Introdução

Equação do Calor: $$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Condições de Contorno:

$T(x,0)=T_i$ condição inicial (t=0): T constante

$T(x\rightarrow\infty,t)=T_i$ condição longe da superfície ($x \rightarrow \infty$): T constante, igual à T_i

Caso 1: $T(0,t)=T_s$ condição na superfície (x=0): T constante

Caso 2: $-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = q"_0$ condição na superfície (x=0): q” constante

Caso 3: $-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h[T_\infty - T(0,t)]$ condição na superfície (x=0): convecção

Caso 1: Temperatura Superficial Constante

Caso 1: $$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(x, t = 0) = T_i$$

$$T(x \to \infty, t) = T_i$$

$$T(x = 0, t) = T_s$$

Solução pelo Método da Similaridade: EDP → EDO

Variável de Similaridade:

$$\eta = \frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{(4\alpha t)^{1/2}}\frac{dT}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d}{d\eta}\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{4\alpha t}\frac{d^2 T}{d\eta^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{2t(4\alpha t)^{1/2}}\frac{dT}{d\eta}$$

Caso 1: Temperatura Superficial Constante

Solução pelo Método da Similaridade

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} = -2\eta\frac{dT}{d\eta} \qquad \begin{cases} T(\eta = 0) = T_s \\ T(\eta \to \infty) = T_i \end{cases}$$

$$\frac{d(dT/d\eta)}{(dT/d\eta)} = -2\eta\, d\eta \longrightarrow \ln(dT/d\eta) = -\eta^2 + C_1' \rightarrow \frac{dT}{d\eta} = e^{-\eta^2} e^{C_1'}$$

$$\frac{dT}{d\eta} = C_1 \exp(-\eta^2) \longrightarrow T = C_1 \int_0^\eta \exp(-u^2)\, du + C_2$$

$$T(\eta = 0) = T_s \longrightarrow C_2 = T_s$$

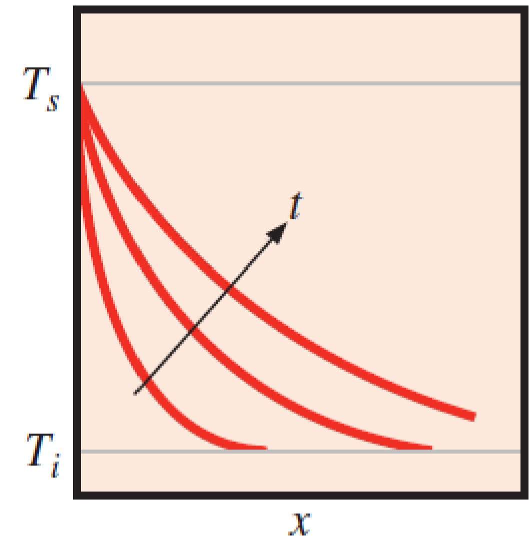
$$T(\eta \to \infty) = T_i \longrightarrow C_1 = \frac{2(T_i - T_s)}{\pi^{1/2}}$$

Caso 1: Temperatura Superficial Constante

Solução pelo Método da Similaridade

$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = (2/\pi^{1/2})\int_0^{\eta} \exp(-u^2)\, du \equiv \text{erf}\, \eta$$

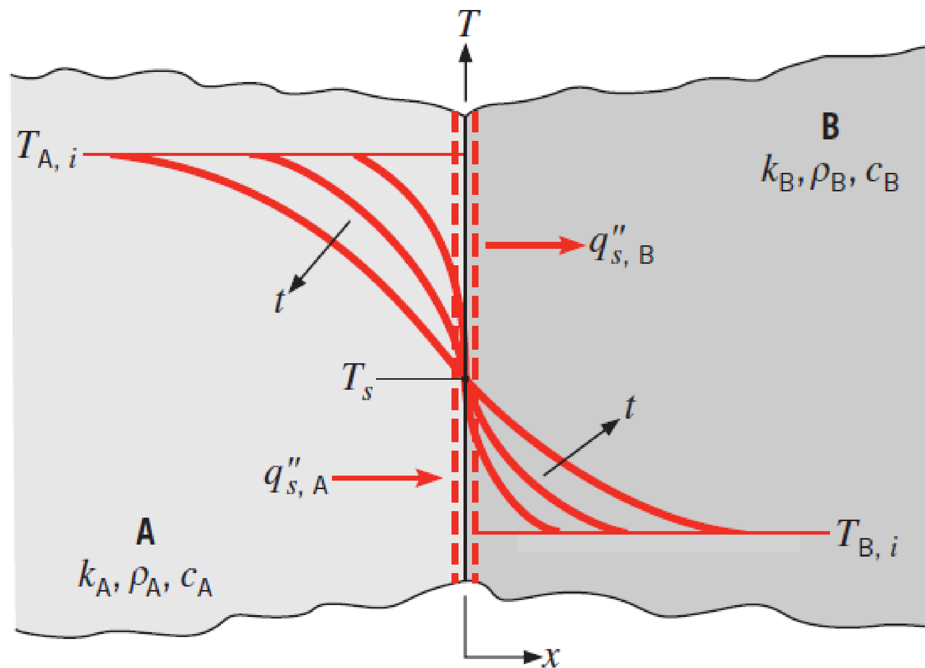
$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$



$$q''_s(t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

Caso 1: Temperatura Superficial Constante

Dois sólidos semi-infinitos, inicialmente a temperaturas uniformes $T_{A,i}$ e $T_{B,i}$ tem suas superfícies livres colocadas em contato. Desprezando a resistência de contato, no instante do contato (t=0) ambas as superfícies vão assumir uma temperatura igual, uniforme T_s, tal que $T_{B,i} < T_s < T_{A,i}$.



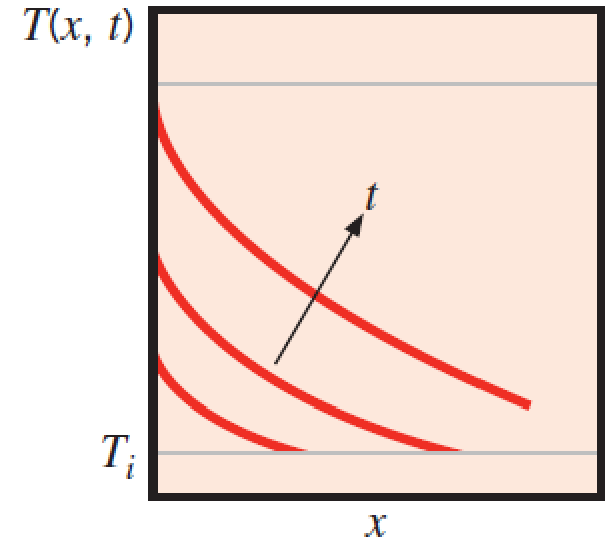
$$q''_{s,A} = q''_{s,B}$$

$$\frac{-k_A(T_s - T_{A,i})}{(\pi\alpha_A t)^{1/2}} = \frac{k_B(T_s - T_{B,i})}{(\pi\alpha_B t)^{1/2}}$$

$$T_s = \frac{(k\rho c)_A^{1/2} T_{A,i} + (k\rho c)_B^{1/2} T_{B,i}}{(k\rho c)_A^{1/2} + (k\rho c)_B^{1/2}}$$

Caso 2: Fluxo de Calor na Superfície Constante

Condições de Contorno:



$T(x,0)=T_i$

$T(x\rightarrow\infty,t)=T_i$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = q''_0$$

$$q''_s = q''_o$$

$$T(x,t) - T_i = \frac{2q''_o(\alpha t/\pi)^{1/2}}{k}\exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{q''_o x}{k}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

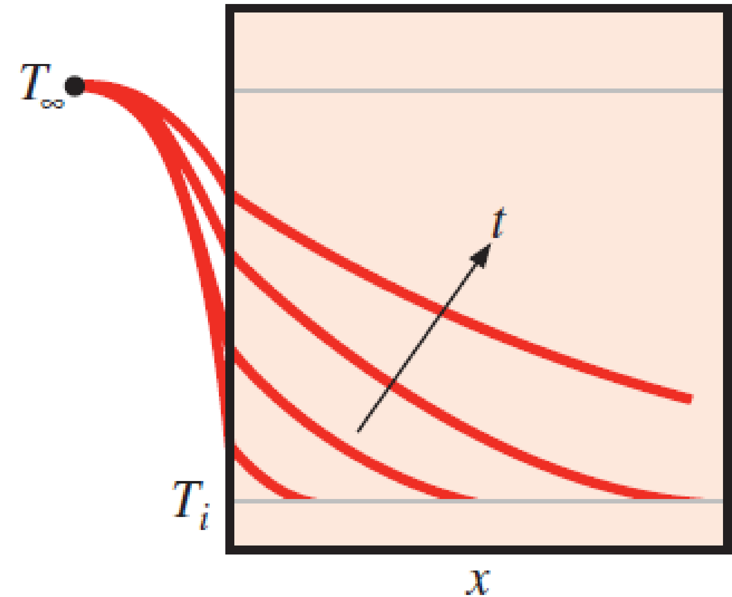
Caso 3: Convecção na Superfície

Condições de Contorno:

$T(x,0)=T_i$

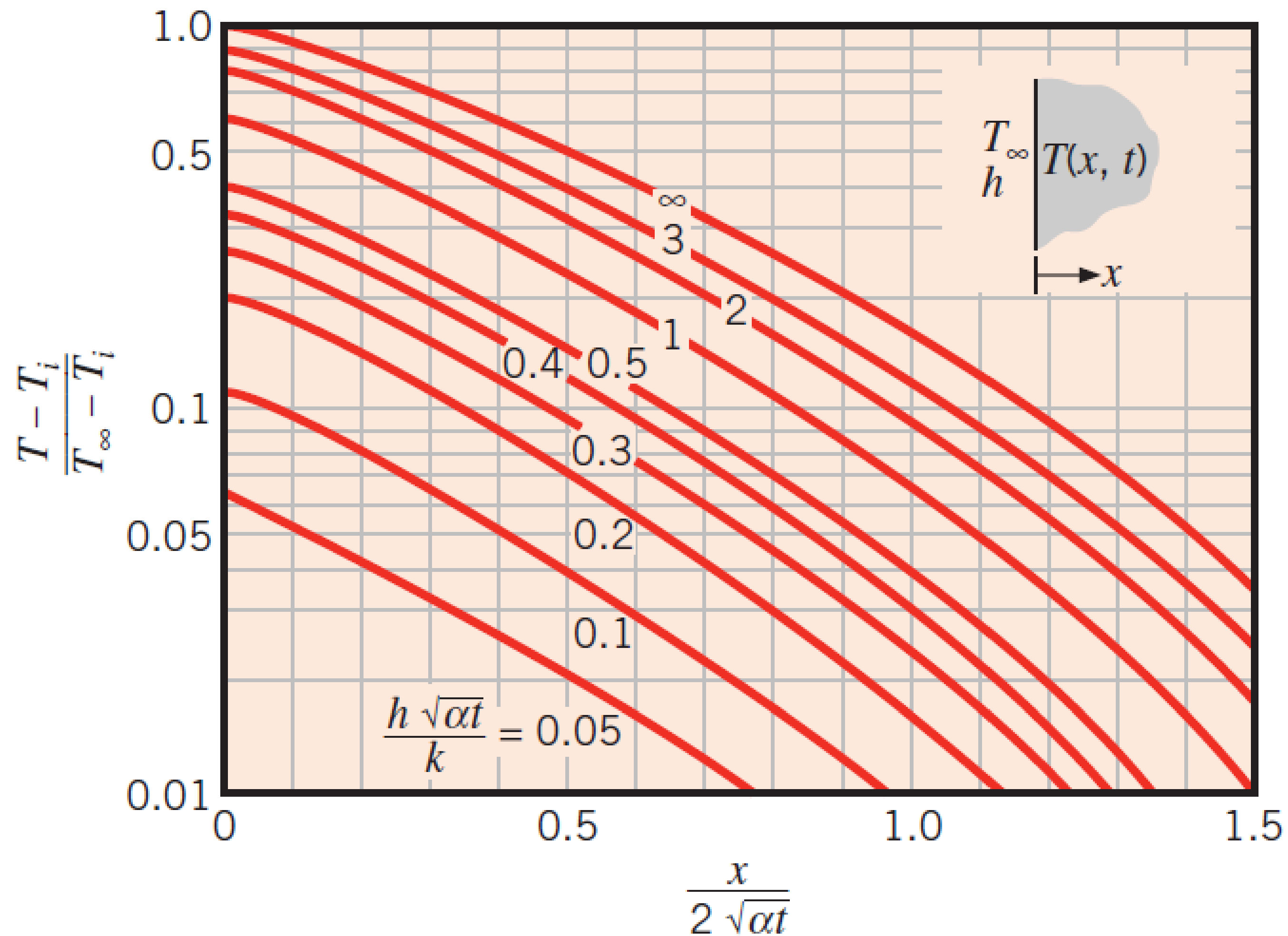
$T(x \rightarrow \infty, t)=T_i$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = h[T_\infty - T(0,t)]$$



$$\frac{T(x,t)-T_i}{T_\infty - T_i} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \left[\exp\left(\frac{hx}{k}+\frac{h^2\alpha t}{k^2}\right)\right]\left[\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}+\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)\right]$$

Caso 3: Convecção na Superfície



Espessura de Penetração Térmica δ_p

Definição: valor de x (profundidade – espessura) para o qual:

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = 0{,}9$$

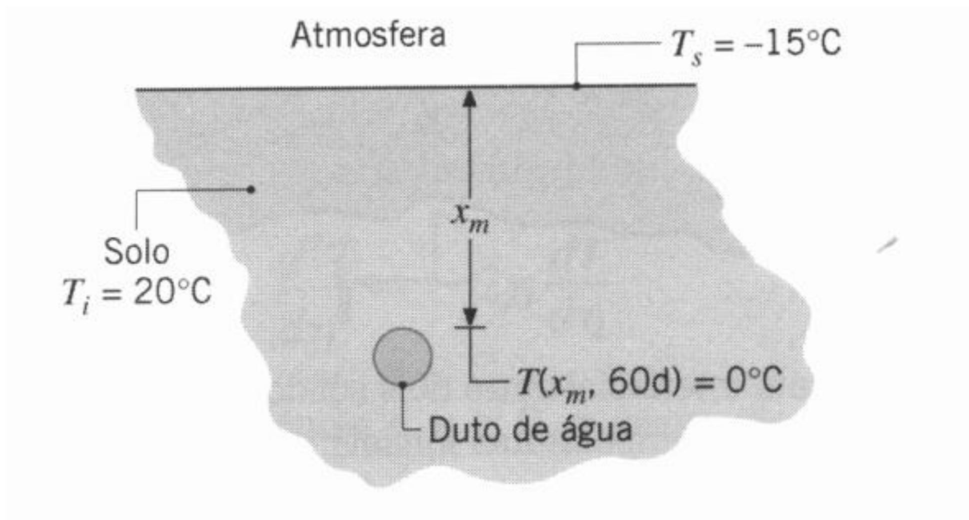
Para o Caso 1 – condição de contorno na superfície $T(0,t)=T_s$:

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

Aplicação: uma parede plana de espessura L poder ser considerada como um sólido semi-infinito se $\delta_p < L \rightarrow Fo < 0{,}2$.

Exemplo

<u>Exercício Resolvido 5.6:</u>



Considerações:

- Condução 1D estacionária em x
- Sólido: meio semi-infinito
- Propriedades constantes

Pede-se: profundidade mínima para não haver congelamento após 60 dias